



## مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان اول دبیرستان

۱) مجموع عناصر جدول ضرب  $10 \times 10$  چند است؟ در سطر  $i$ ، ستون  $j$  این جدول،  $i \times j$  نوشته شده است.

الف) ۵۰۵۰ (ب) ۴۰۵۰ (ج) ۶۰۵۰ (د) ۲۰۲۵ (ه) ۳۰۲۵

۲) یک غلتک مخروطی شکل رنگی، با زاویه رأس  $60^\circ$  و طول یال یک متر، یک دور روی سطح زمین غلت می خورد. با فرض این که رأس مخروط ثابت است، مساحت رنگ شده سطح زمین چند مترمربع است؟

الف) ۱ (ب)  $\frac{\pi}{2}$  (ج)  $\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$  (د)  $\pi$  (ه)  $\frac{1}{2}$

۳) از شهر  $A$  جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر  $B$  و  $C$  در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله دو شهر  $B$  و  $C$  از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ می دانیم که فاصله شهر  $A$  از دو شهر دیگر  $60$  و  $50$  کیلومتر و فاصله دو شهر  $B$  و  $C$  از هم  $40$  کیلومتر است.

الف) ۳۰ (ب) ۴۰ (ج) ۵۰ (د) ۶۰ (ه) ۷۰

۴) روی یک کره جغرافیایی به شعاع  $20$  سانتی متر، مساحت ایران  $18$  سانتی متر مربع است. نقاط ایران را با پاره خط‌هایی به مرکز کره وصل می کنیم. حجم تولیدشده توسط این پاره خط‌ها چند سانتی متر مکعب است؟

الف) ۱۲۰ (ب) ۳۶۰ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۸۰ (ه) ۹۰

۵) چند عدد طبیعی را می توان به صورت جمع تعدادی عدد طبیعی متمایز کم تر از  $100$  نوشت؟

الف) ۴۹۵۰ (ب) ۱۴۴۰ (ج) ۴۸۵۱ (د) ۵۰۵۰ (ه) بیش از ۱۰۰۰۰



۶) اگر عمر زمین یک سال تصور شود، از فروردین تا آذر شرایط حیات فراهم شده و تا اواخر بهمن حیات بیش تر در آب‌ها بوده است. در اواسط اسفند دایناسورها پدید آمدند و پستانداران حدود پنج دقیقه به سال تحویل ظاهر شدند. تاریخ پنج هزار ساله مکتوب بشر چیزی حدود یک ثانیه‌ای طول کشیده که توپ سال نو در پایان آن به صدا در می آید. عمر زمین بر حسب سال عددی چند رقمی است؟

الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۳

۷) فرض کنید هنگامی که تالس ارتفاع یکی از اهرام مصر را از روی سایه آن محاسبه می کرده زاویه تابش خورشید نسبت به افق سی درجه بوده باشد. اگر قاعده هرم مذکور مربعی به ضلع صد متر، و وجوه دیگرش مثلث متساوی الاضلاع باشد، فاصله نوک هرم تا سایه نوک هرم تقریباً چند متر است؟

الف) ۱۲۰ (ب) ۱۴۰ (ج) ۱۶۰ (د) ۱۸۰ (ه) ۲۰۰



## مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان اول دبیرستان

۸) چند سه تایی طبیعی  $10 \leq z < y < x$  وجود دارد که  $x + y = z$ ؟

- الف) ۱۵ (ب) ۲۰ (ج) ۴۰ (د) ۴۵ (ه) ۵۰

۹) فرض کنید  $x^4 + 2x^2$  در بازه  $[-1, 1]$  محدود شده باشد. دامنه تغییرات  $x$  زیرمجموعه کدام یک از بازه‌های زیر است؟

- الف)  $[0, 1]$  (ب)  $[\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  (ج)  $[\frac{-1}{3}, 1]$  (د)  $[-1, \frac{1}{3}]$  (ه) هیچ کدام

۱۰) در مثلث  $ABC$  سه نقطه  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  به ترتیب بر روی سه ضلع  $BC$ ،  $CA$  و  $AB$  چنان واقع شده‌اند که سه خط  $AA'$ ،  $BB'$  و  $CC'$  در نقطه  $P$  هم‌رسند. می‌دانیم که  $PB = 4$ ،  $PC = 6$ ،  $PA' = 2$ ،  $PB' = 2$  و  $PC' = 3$ . اندازه  $PA$  چقدر است؟

- الف) ۳ (ب)  $\frac{3}{5}$  (ج) ۴ (د)  $\frac{4}{5}$  (ه) ۵

۱۱) به ازای چند عدد گویای ناصفر  $q$ ، حاصل  $q + \frac{1385}{q}$  عددی صحیح است؟

- الف) ۱۲ (ب) ۱۷ (ج) ۴ (د) ۸ (ه) بی‌نهایت

۱۲) مستطیلی در صفحه با رئوس  $(0, 0)$ ،  $(100, 0)$ ،  $(150, 0)$  و  $(150, 100)$  در نظر بگیرید. چند خط موازی با قطر گذرا از رأس  $(0, 0)$ ، اضلاع مستطیل را در دو نقطه متمایز با مختصات صحیح قطع می‌کند؟ خود قطر را هم بشمارید.

- الف) ۹۹ (ب) ۱۰۰ (ج) ۱۹۹ (د) ۲۰۰ (ه) ۳۰۰

۱۳) عقربه دقیقه‌شمار ساعتی، که خراب شده است، برعکس می‌چرخد!! از ساعت ۹ صبح تا ساعت ۹ شب چند بار عقربه‌های ساعت بر هم منطبق می‌شوند؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۳

۱۴) مکعب چند محور تقارن دارد؟

- الف) ۴ (ب) ۷ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۳

۱۵) درون دایره‌ای خاصیت آینه‌ای دارد و نقطه  $A$  روی محیط آن است. چند راستا وجود دارد که اگر از  $A$  در امتداد آن‌ها پرتوی نوری تابیده شود، پرتو در ۲۶ امین برخورد خود با دایره در نقطه  $A$  است؟

- الف) ۱۲ (ب) ۱۳ (ج) ۲۵ (د) ۲۶ (ه) نامتناهی راستا



## مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

ویژه دانش آموزان اول دبیرستان

۱۶) ضرایب چندجمله‌ای  $P$  صحیح است. تحت کدام یک از شرایط زیر  $P$  نمی‌تواند ریشه صحیح داشته باشد؟  
 الف)  $P(5) = 6$  و  $P(6) = 6$  ب)  $P(5) = 5$  و  $P(6) = 5$  ج)  $P(5) = 6$  و  $P(6) = 6$   
 د)  $P(5) = 6$  و  $P(6) = 5$  ه) تحت هر کدام از این شرایط،  $P$  می‌تواند ریشه صحیح داشته باشد.



۱۷) قورباغه‌ای در نقطه صفر محور نشسته است. این قورباغه در مرحله  $n$  ام، یک پرش بلند به طول  $n$  سانتی‌متر و سپس  $n - 1$  پرش به طول ۱ سانتی‌متر انجام می‌دهد (۱، ۲، ۱، ۳، ۱، ۱، ۴، ۱، ۱، ۵، ...). این قورباغه به کدام یک از اعداد زیر نخواهد رسید؟

۱۹۸۱ (ه)

۱۰۲۳ (د)

۱۴۲۶ (ج)

۱۳۸۴ (ب)

۲۰۰۶ (الف)

$$\begin{cases} x = \frac{2y}{1-y^2} \\ y = \frac{2x}{1-x^2} \end{cases}$$

۱۸) دستگاه معادلات روبه‌رو چند جواب دارد؟

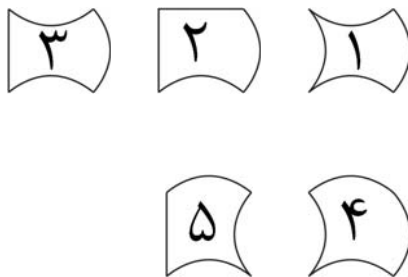
(ج) سه

(ب) دو

(الف) یک

(ه) بی‌نهایت

(د) چهار



۱۹) هر یک از کاشی‌های روبرو با اضافه و یا کم کردن قطاعی از دایره به مربع  $1 \times 1$  به دست آمده است. هر کدام از این کاشی‌ها را «صفحه‌پرکن» می‌گوییم اگر بتوان با آن صفحه نامتناهی شبکه‌بندی شده را پوشاند؛ هر کاشی را می‌توان  $90^\circ$  درجه و  $180^\circ$  درجه دوران داد و آن را پشت و رو کرد. البته کاشی باید طوری در صفحه قرار داده شود که چهار گوشه آن روی نقاط شبکه قرار گیرد. کدام یک از کاشی‌ها صفحه‌پرکن هستند؟

۴ و ۲ (ه)

۴ و ۳ (د)

۵ و ۳ و ۲ (ج)

۵ و ۴ و ۲ (ب)

۵ و ۱ (الف)

۲۰) به ازای چند عدد طبیعی مانند  $m$  حاصل  $\sqrt{m-1} + \sqrt{m+15}$  صحیح است؟

(ه) بی‌نهایت

(د) ۴

(ج) ۳

(ب) ۲

(الف) ۱

۲۱) برای عدد طبیعی  $n$ ،  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$  می‌دانیم که نمایش  $20!$  در مبنای ۱۰ به این صورت است:  $xy0008176620029342$ ، که  $x$  و  $y$  رقمند. کدام درست است؟

(ج)  $x = 8$  و  $y = 5$

(ب)  $x = 5$  و  $y = 8$

(الف)  $x = 0$  و  $y = 0$

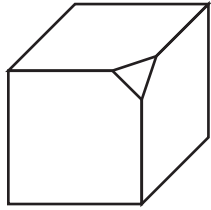
(ه)  $x = 8$  و  $y = 0$

(د)  $x = 4$  و  $y = 0$

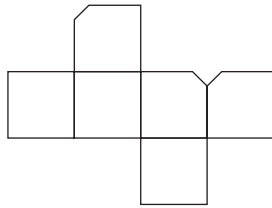


## مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

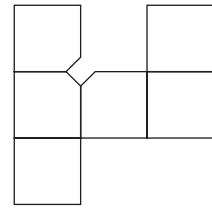
ویژه دانش آموزان اول دبیرستان



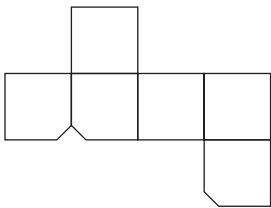
۲۲) گوشه یک مکعب را مطابق شکل روبرو بریده‌ایم. شکل بازشده مکعب کدام است؟



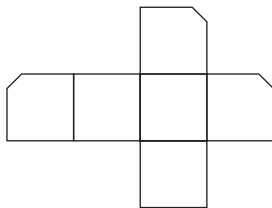
(ب)



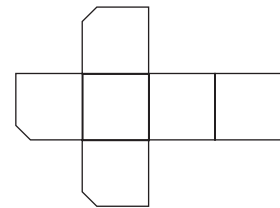
(الف)



(ه)



(د)



(ج)

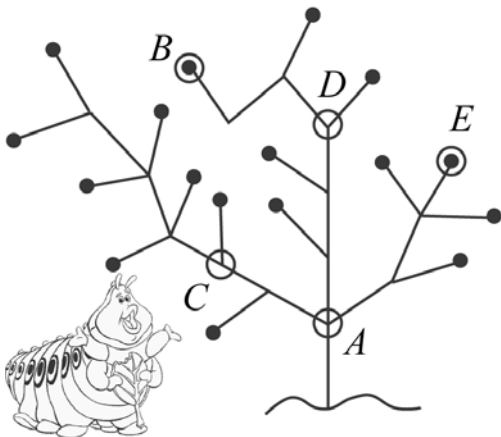


۲۳) شازده کوچولو، روی سیاره کوچکی زندگی می‌کند که شعاعش ۶۰ متر است. روزی با شروع از روی خط استوا،  $30\pi$  متر به شرق،  $20\pi$  متر به شمال،  $30\pi$  متر به غرب و سرانجام  $20\pi$  متر به جنوب می‌رود. شازده کوچولو تا مکان اولش چند متر فاصله دارد؟

(الف) صفر (ب)  $30\pi$  (ج)  $20\pi$  (د)  $40\pi$  (ه)  $15\pi$

۲۴) فرض کنید  $(2 + \sqrt{3})^n = 5042 + b\sqrt{3}$  که در آن  $n$  طبیعی و  $b$  صحیح است.  $b$  چند است؟

(الف) ۱۳۸۴ (ب) ۳۵۴۳ (ج) ۷۸۰ (د) ۵۸۲۲ (ه) ۲۹۱۱



۲۵) کرمی شکمو می‌خواهد همه میوه‌های درخت روبرو را بخورد و در عین حال مسافتی که روی شاخه‌ها طی می‌کند، کم‌ترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید کرم می‌تواند مکان خود را برای شروع انتخاب کند. کدام نقطه بهتر است؟ فاصله بین دو نقطه متوالی روی درخت یک متر است و تمام شاخه‌های انتهایی، میوه دارند. میوه‌ها با دایره سیاه توپر مشخص شده‌اند.

(الف) A (ب) B (ج) C (د) D (ه) E



## مرحله اول بیست و چهارمین المپیاد مقدماتی ریاضی کشور

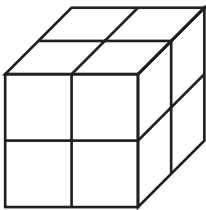
ویژه دانش آموزان اول دبیرستان

(۲۶) کدام بزرگ‌تر است؟

- (الف)  $2^{431}$  (ب)  $3^{421}$  (ج)  $4^{321}$  (د)  $2^{143}$  (ه)  $3^{142}$

(۲۷)  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه زیرمجموعه دلخواه مجموعه اعداد طبیعی هستند. با دو عمل اجتماع و مکمل، حداکثر چند مجموعه مختلف می‌توان ساخت؟

- (الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۱۸ (د) ۱۲۸ (ه) ۲۵۶



(۲۸) شبکه مکعبی  $2 \times 2 \times 2$  روبرو را در نظر بگیرید. مورچه‌ای می‌خواهد از کوتاه‌ترین مسیر، با حرکت بر روی شبکه‌های سطح مکعب از راس  $A$  به راس  $B$  برود. این کار به چند طریق ممکن است؟

- (الف) ۶۰ (ب) ۹۰ (ج) ۳۶ (د) ۵۴ (ه) ۴۵

(۲۹) الگوریتم زیر را روی چندجمله‌ای  $P(x)$  اجرا کرده‌ایم.

۱.  $d$  را برابر درجه  $P$  قرار بده و اگر  $d < 1$  به سطر ۴ برو.

۲.  $a$  را برابر ضریب  $x^d$  در  $P$  قرار بده و  $P(x) - ax^{d-1}(x+2)$  را به جای  $P(x)$  بگذار.

۳. به سطر ۱ برو.

۴.  $P$  را چاپ کن.

پس از اجرای الگوریتم عدد ۱۳۸۴ چاپ شده است.  $P$  در آغاز کدام بوده است؟

- (الف)  $45x^3 - x^{10}$  (ب)  $13x^7 - 2$  (ج)  $83x^3 - x^{11}$  (د)  $16x^8 + x$  (ه)  $-x^{11} + 84$



(۳۰) در افسانه‌ها آمده است وقتی پادشاه هند می‌خواست به مخترع شطرنج پادشاه دهد، طرف در دیزی را باز دید (!) و خواست به ازای خانه اول شطرنج یک دانه گندم، به ازای خانه دوم، دو دانه گندم و به همین ترتیب برای هر خانه‌ای، دو برابر خانه قبل به او گندم داده شود. فرض کنید خانه‌های صفحه شطرنج مانند شکل روبرو شماره‌گذاری شده‌اند. چه کسری از کل گندم‌ها به ازای خانه‌های سفید درخواست شده است؟ (جواب تا دو رقم اعشار است.)

- (الف)  $0/33$  (ب)  $0/50$  (ج)  $0/66$  (د)  $0/75$  (ه) هیچ‌کدام

توضیح: در سؤال ۲۸، شکل ناقص است. راس  $A$  و راس  $B$ ، دو گوشه مقابل به هم در مکعب هستند.